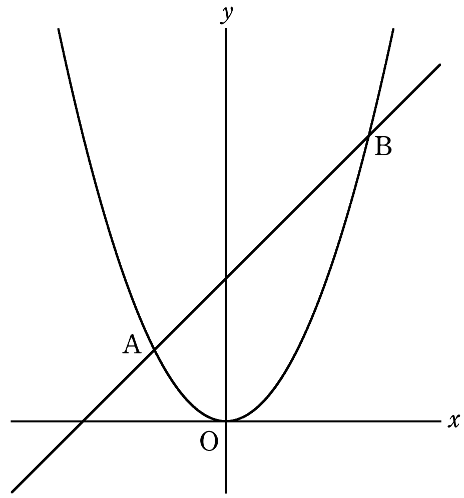
右の図のように，放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=x+4$ との交点をそれぞれA，Bとする。Aの座標が$(-2, 2)$のとき，次の各問いに答えよ。



(1)　a の値を求めよ。

(2)　点Bの座標を求めよ。

(3)　x 軸上に点Pをとる。AP+BPの長さが最短となるときの点Pの座標を求めよ。

解答と解説

(1)　$A(-2, 2)$は $y=ax^2$ 上の点なので，$x=-2$，$y=2$ を代入すると，

$2=a\times(-2)^2$

$4a=2$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$

(2)　点Bは $y=\dfrac{1}{2}x^2$ …①と $y=x+4$…②との交点なので，

①を②に代入すると，

$\dfrac{1}{2}x^2=x+4$

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

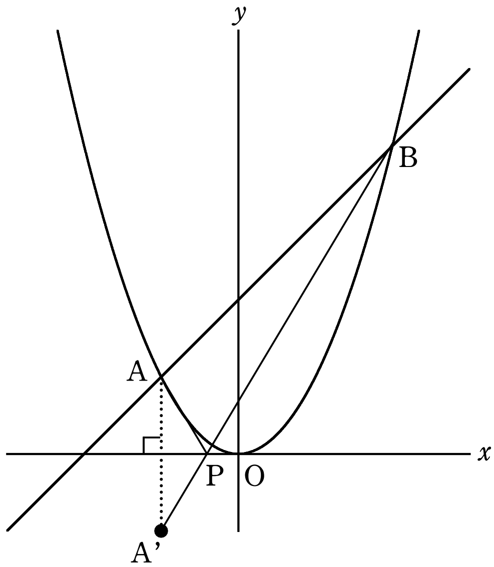
$x=-2, 4$

点Bの x 座標は4である。

$x=4$ を②に代入すると，$y=8$

よって，点Bの座標は$(4, 8)$である。

(3)　点 A と x 軸について対称な点を A’ とすると
AP＝AP’ となるので，AP＋BP＝AP’＋BPとなる。
よって，AP’＋BP の長さが最短となるとき，AP＋BP の長さも最短となる。
AP’＋BP の長さが最短となるのは，3 点 A’，P，B が一直線上にあるときなので
点 P は直線 A’B と x 軸との交点となる。



A$(-2,\ 2)$ より A’$(-2,\ -2)$ であり，B$(4,\ 8)$ なので

直線 A’Bの傾きは $\dfrac{8-(-2)}{4-(-2)}=\dfrac{5}{3}$ である。

直線 A’Bの式を $y=\dfrac{5}{3}x+b$ とすると，点 B を通るので

$x=4$，$y=8$ を代入すると，

$$8=\frac{5}{3}\times 4+b$$

$$b=\frac{4}{3}$$

よって，直線 A’B の式は $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{4}{3}$ である。

この式に $y=0$ を代入すると，

$$0=\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}$$

$$-\frac{5}{3}x=\frac{4}{3}$$

$$x=-\frac{4}{5}$$

よって，点 P の座標は $\left(-\dfrac{4}{5},\ 0\right)$ である。